Seminarium „Analiza w Tatrach”

Modelowanie świata

Fizyka matematyczna
czy też
matematyka fizyczna?

Anna Ochal

Czym jest model?

Czym jest model?

Czym jest model?

Portret namalowany w określonym celu

Przedstawienie modelowe: uwzględnia część cech odnoszących się do rzeczywistego przedmiotu

Czym jest model?

- każdy obraz jest modelem
- nie musimy wiedzieć wszystkiego
- wystarczą główne (zasadnicze) charakterystyki
- skuteczność opisu przedmiotów realnego świata za pomocą modeli

Czym jest model?

- zbiór słów
- labirynt linii na schemacie
- zmniejszona lub powiększona kopia
  teoria podobieństw

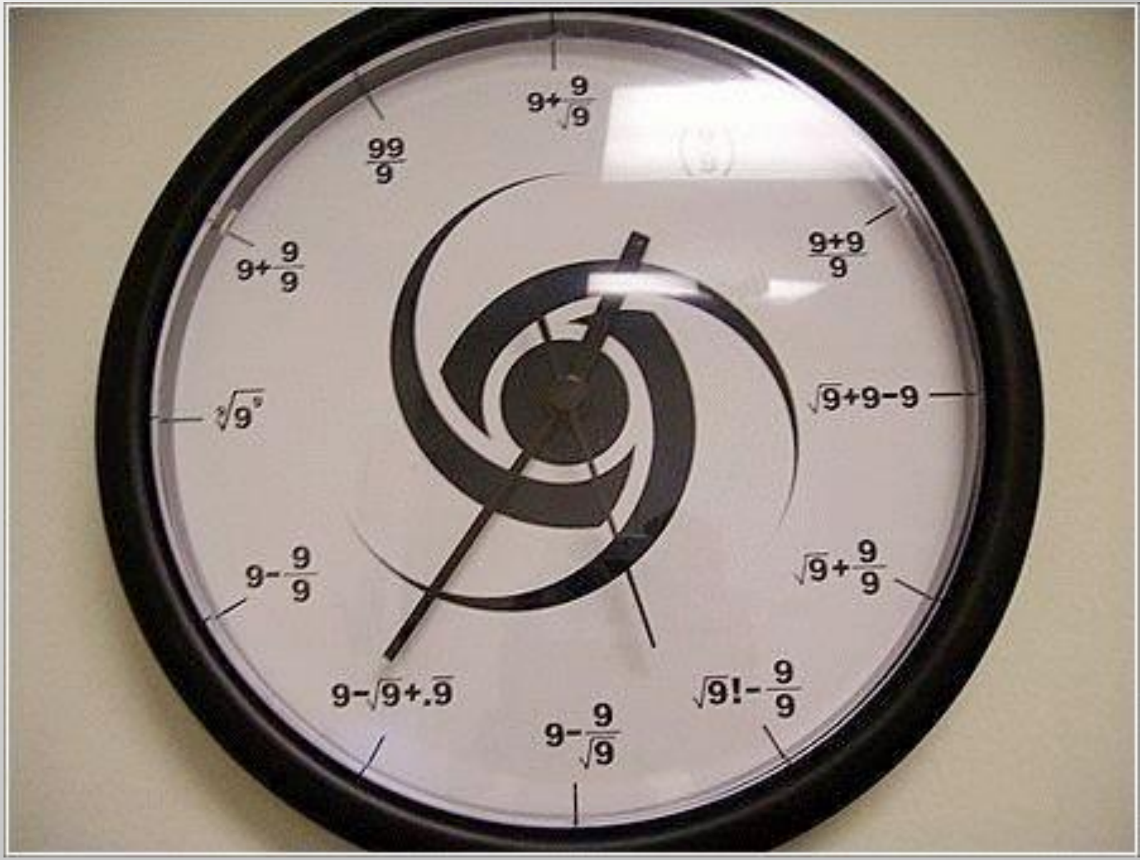
Jeśli model jest zły, to należy go ulepszyć; zbyt prosty, to można komplikować; nadto złożony, to upraszczać...

Czym jest model matematyczny?

wzorem, równaniem, wykresem, zbiorem...

Aby zbudować model matematyczny:
- wydzielamy parametr(y)
- dobieramy prawdopodobną zależność
- regulujemy jej charakter
- wprowadzamy warunki „fizyczne” – dostosowujemy model do fizycznego pierwowzoru

model ruchu okresowego



model ruchu okresowego

- jednowymiarowy ruch (jedna współrzędna)

model ruchu okresowego

- jednowymiarowy ruch (jedna współrzędna)
- drugie prawo Newtona

$$ma=F$$

$$mx''=F$$

$x:[0,T]\rightarrow R$ *wychylenie*

model ruchu okresowego

- jednowymiarowy ruch (jedna współrzędna)
- drugie prawo Newtona

$$ma=F$$

$$mx''=F$$

$$x:[0,T]\rightarrow R$$ *wychylenie*

- siła proporcjonalna do wychylenia i o zwrocie przeciwnym - prawo Hooke'a (eksperymentalnie)

$$F= -kx,$$ k – *stała sprężystości*

- Uw.: dobrze spełnione dla niewielkich wychyleń model ruchu okresowego

$$x''(t) = -\,\omega_0^2 x(t)$$

jest to **równanie różniczkowe zwyczajne**

rz.2, liniowe, jednorodne

rozwiązaniem jest funkcja x(t)

„odgadnijmy" rozwiązanie

model ruchu okresowego

$$x''(t) = -\omega_0^2 x(t)$$

jest to **równanie różniczkowe zwyczajne**

- rz.2, liniowe, jednorodne
- rozwiązaniem jest funkcja
- „odgadnijmy" rozwiązanie

$x(t)= c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t$, c_1, c_2 – stałe

rozwiązanie ogólne (rodzina funkcji)

Jak wyznaczyć c_1, c_2?

model ruchu okresowego

Jak wyznaczyć c_1, c_2?

korzystając z warunków początkowych:

$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$

$x(t) = v_0/\omega_0 \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t$

$\mathbf{x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)}$ *drgania harmoniczne*

A – amplituda

ω_0 – częstotliwość

φ – faza początkowa drgań

drgania harmoniczne

- opierając się na prawie ogólnym (prawo Newtona)
- przyjmując założenie o postaci siły (F ~ x)

Wniosek: częstość drgań ω_0 nie zależy od amplitudy; dwa jednakowe wahadła, różnie wychylone z położenia równowagi, będą drgały z jednakowymi częstotliwościami (tzw. częstość własna)

drgania harmoniczne

Co jeszcze opisuje nasz model?

- ocean
- prąd elektryczny w obwodzie drgającym
- atomy w różnych kryształach

drgania harmoniczne

Czy model jest adekwatny do rzeczywistości?

Takie drgania, raz wzbudzone, trwałyby wiecznie...

Rzeczywiste wahadło zatrzyma się...

Ulepszymy model – uwzględnimy opór powietrza...

zatrzymać wahadło zegara

- siła oporu zwrócona przeciwnie do ruchu
- siła tarcia proporcjonalna do prędkości ciała

$$\mathbf{F}_{op} = - \nu\ \mathbf{v}$$

$$\mathbf{F}_{op} = - \nu\ \mathbf{x}'$$

zależność ta jest słuszna dla małych prędkości (fakt eksperymentalny) drgania tłumione

$$x''(t) + 2\mu x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

$$2\mu = \nu/m$$

podamy rozwiązania:

i) $\mu > \omega_0$ dominacja siły oporu nad siłą sprężystości

żadnych drgań nie ma – układ „drgający” od razu wraca do stanu wyjściowego bez żadnych drgań

drgania tłumione

ii) $\mu < \omega_0$ $\quad x(t) = e^{-\mu t}(c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t)$

$$\pm i\omega = \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

tłumione drgania harmoniczne

$$t \to \infty \quad A \to 0$$

rozhuśtać huśtawkę...

model wahadła matematycznego

$$x''(t)+\omega_0^2 x(t)=0$$

wahadło popychamy za pomocą zewnętrznej siły periodycznej

$$F_e(t) = A_e \sin \omega_e t$$

rozhuśtać huśtawkę...

$$x''(t)+\omega_0^2x(t) = A_e \sin \omega_e t$$

równanie różniczkowe zwyczajne rz.2, niejednorodne

rozwiązanie szczególne

$x(t)=A_e/(\omega_0^2-\omega_e^2) \sin \omega_e t$

rozwiązanie ogólne

$x(t)=c_1 \sin \omega_0 t+ c_2 \cos \omega_0 t +A_e/(\omega_0^2-\omega_e^2) \sin \omega_e t$

RORLNJ=RORLJ+RSRLNJ

rozhuśtać huśtawkę...

$$x(t)=c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t + A_e/(\omega_0^2-\omega_e^2) \sin \omega_e t$$

$\omega_e \to \omega_0$

amplituda drgań wymuszonych rośnie

$\omega_e = \omega_0$

amplituda wykaże tendencję nieograniczonego wzrostu

REZONANS

metoda Eulera

Równanie $x'(t)=f(t,x(t))$ z war. pocz. $x(0)=x_0$

można rozwiązać numerycznie stosując siatkę

$$t_{i+1}=t_i+h$$

i schemat różnicowy

$$x_{i+1}=x_i+hf(t_i,x_i)$$

gdzie $x_i=x(t_i)$,

gdyż $x'(t_i) \sim (x_{i+1}-x_i)/h$

Jeżeli matematyk zajmuje się badaniem procesów fizycznych i ich rezultatów, a następnie formułuje wnioski, to czy wnioski te nie mogą być wyrażone ogólnie zrozumiałym językiem w sposób całkowicie pełny, jasny i określony, podobnie jak to się czyni za pomocą wzorów matematycznych?

Myślę, że tak właśnie powinno być...

Michael Faraday